

ENS 2018 planche 9

Exercice 1

1. (a) Notons Y_i la variable aléatoire égale au gain (algébrique) du joueur. Dans le jeu 1, Y_1 est à valeurs dans $\{0, c\}$.

$$P(Y_1 = c) = P(X > c) = 1 - P(X \leq c) = 1 - (1 - e^{-\lambda c}) = e^{-\lambda c}$$

et

$$P(Y_1 = 0) = 1 - P(Y_1 = c) = 1 - e^{-\lambda c}$$

donc

$$\begin{aligned} G_1(c) &= E(Y_1) \\ &= 0 \times P(Y_1 = 0) + c \times P(Y_1 = c) \\ &= c e^{-\lambda c} \end{aligned}$$

Dans le jeu 2 Y_2 est à valeurs dans $\{-c, c\}$ et $P(Y_2 = c) = P(X > c) = e^{-\lambda c}$ tandis que $P(Y_2 = -c) = 1 - e^{-\lambda c}$. On a donc :

$$\begin{aligned} G_2(c) &= E(Y_2) \\ &= -cP(Y_2 = -c) + cP(Y_2 = c) \\ &= -c \times (1 - e^{-\lambda c}) + c e^{-\lambda c} \\ &= c(2e^{-\lambda c} - 1) \end{aligned}$$

On étudie la fonction G_1 dérivable sur $]0, +\infty[$:

$$\forall c > 0, \quad G_1'(c) = e^{-\lambda c}(1 - \lambda c)$$

donc $G_1'(c)$ est positive lorsque $c < \frac{1}{\lambda}$ et négative lorsque $c > \frac{1}{\lambda}$. G_1 atteint donc son maximum en $c = \frac{1}{\lambda}$ donc

$$m_1 = \sup_{c \geq 0} G_1(c) = G_1(1/\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-1}$$

- (b) Comparons $f_1(c)$ et $f_2(c)$ pour tout c :

$$\begin{aligned} \forall c > 0, \quad G_2(c) &= c(2e^{-\lambda c} - 1) \\ &= c e^{-\lambda c} + c(e^{-\lambda c} - 1) \\ &= G_1(c) + \underbrace{c(e^{-\lambda c} - 1)}_{\leq 0} \qquad \text{car } -\lambda c < 0 \text{ donc } e^{-\lambda c} < 1. \\ &\leq G_1(c) \end{aligned}$$

Pour tout $c > 0$, $G_2(c) \leq G_1(c)$, donc en particulier $G_2(c) \leq m_1$ et donc $\sup_{c > 0} G_2(c) \leq m_1$ c'est à dire $m_2 \leq m_1$.

2. On a $G_2(c) = c(P(X > c) - P(X < c)) = c(1 - 2P(X \leq c)) = c(1 - 2 \int_0^c f(t) dt)$

La fonction $c \mapsto \int_0^c f(t) dt$ varie continument entre 0 et 1 lorsque c varie dans $]0, +\infty[$, donc il existe une valeur $c_0 > 0$ de c pour laquelle $\int_0^{c_0} f(t) dt \in]0, \frac{1}{2}[$. On a donc $1 - 2 \int_0^{c_0} f(t) dt > 0$ et donc $c_0(1 - \int_0^{c_0} f(t) dt) > 0$.

Comme $\sup_{c > 0} G_2(c) \geq G_2(c_0) > 0$ le résultat est démontré.

3. On a pour tout $c > 0$, $G_1(c) = c \int_c^{+\infty} f(t) dt$.

Pour tout $c > 0$,

$$\begin{aligned} c \int_c^{+\infty} f(t) dt &= \int_c^{+\infty} c f(t) dt \\ &\leq \int_c^{+\infty} t f(t) dt \qquad \text{car } \forall t \in [c, +\infty[, c \leq t \\ &\leq E(X) \end{aligned}$$

ces inégalités sont valables car toutes les intégrales convergent comme X admet une espérance. G_1 est majorée par $E(X)$ donc $\sup_{c > 0} G_1(c) \leq E(X) < +\infty$.

4. Posons pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^{3/2}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1[\end{cases}$. f est continue sauf en 1 et positive.

Une primitive de f sur $[1; +\infty[$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^{1/2}}$ donc pour tout $A > 1$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^A f(x) dx &= \left[-\frac{1}{\sqrt{x}} \right]_1^A \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{A} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

donc $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1. Ainsi f est bien une densité de probabilité à support dans \mathbb{R}_+ .

Pour tout réel $c \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} G_1(c) &= cP(X > c) \\ &= c \int_c^{+\infty} f(x) dx \\ &= c \times \frac{1}{\sqrt{c}} \\ &= \sqrt{c} \end{aligned}$$

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} G_1(c) = +\infty \text{ donc } \sup_{c > 0} G_1(c) = +\infty.$$

Exercice 2

1. A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres se lisent sur la diagonale : $Sp(A) = \{0, 1\}$. Notons $E_0(A)$ et $E_1(A)$ les sous-espaces propres associés à ces deux valeurs propres. A est de rang 2 donc $\dim(E_0(A)) = \dim(\text{Ker}(A)) = 3 - 2 = 1$ d'après le théorème du rang.

$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(A - I) = 2$ et donc $\dim(E_1(A)) = \dim(\text{Ker}(A - I)) = 3 - 2 = 1$ d'après le théorème du rang.

Ainsi $\dim(E_0(A)) + \dim(E_1(A)) = 2 < 3$ donc A n'est pas diagonalisable.

2. Si v est un projecteur alors $v^2 = v$. $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de v donc les valeurs propres possibles de v sont 0 et 1. Comme $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(v) \oplus \text{Ker}(v)$ et que $\text{Im}(v) = E_1(v)$, v est bien diagonalisable (mais peut avoir uniquement 0 ou 1 comme valeur propre si $v = 0$ ou si $v = \text{Id}$).
3. u^2 est un projecteur donc $u^4 = u^2$. Le polynôme $X^4 - X^2$ annule u et admet comme racines 0, 1 et -1 , donc ce sont les valeurs propres possibles de u .

u^2 est de rang 1 donc est non inversible, ainsi u est non inversible (sinon u^2 le serait aussi), donc $\text{Ker}(u) \neq \{0\}$ donc 0 est valeur propre de u .

On sait que $u^4 = u^2$ donc $u^2(u^2 - \text{Id}) = 0$. On en déduit que $\text{Im}(u^2 - \text{Id}) \subset \text{Ker}(u^2)$. Or $\text{rg}(u^2) = 1$ donc $\dim(\text{Ker}(u^2)) = 2$ et donc $\text{rg}(u^2 - \text{Id}) \leq 2$ donc $u^2 - \text{Id}$ est non inversible. Or $u^2 - \text{Id} = (u + \text{Id})(u - \text{Id})$, on en déduit que l'un des deux endomorphismes parmi $u + \text{Id}$ et $u - \text{Id}$ est non inversible (si les deux l'étaient alors $u^2 - \text{Id}$ le serait aussi). Pour tout réel λ on sait que $\lambda \in \text{Spec}(u)$ si et seulement si $u - \lambda \text{Id}$ est non inversible, ainsi u admet 1 ou -1 comme autre valeur propre. Il ne peut pas admettre les deux comme valeurs propres car sinon les sous espaces propres associés seraient tous deux dans l'image de u et dans l'image de u^2 , donc le rang de u^2 serait supérieur ou égal à 2 ce qui constituerait une contradiction. Ainsi u admet exactement une autre valeur propre, qui est soit 1 soit -1 .

Si u était diagonalisable sa matrice B dans une base de diagonalisation n'aurait que des 0 et des 1 sur la diagonale donc on aurait $B^2 = B$ et donc u serait un projecteur, contradiction avec les hypothèses de l'énoncé. u n'est donc pas diagonalisable.

4. Notons λ la valeur propre non nulle de u ($\lambda \in \{0, 1\}$).

Soit x un vecteur propre (non nul donc) de u associé à la valeur propre λ . Alors $u(x) = \lambda x$ donc $u^2(x) = \lambda^2 x = x$. Ainsi x est un vecteur propre de u^2 associé à la valeur propre 1 et comme u^2 est de rang 1 on a même $\text{Im}(u^2) = \text{Vect}(x)$.

Puisque u n'est pas diagonalisable, les sous espaces propres E_0 et E_λ sont de dimension 1 tous les deux. L'espace $E_0 \oplus E_\lambda$ est donc strictement inclus dans \mathbb{R}^3 . Soit y un vecteur de \mathbb{R}^3 privé de $E_0 \oplus E_\lambda$. Notons que $u(y) \neq 0$ car $y \notin \text{Ker}(u) = E_0$.

- Si $u^2(y) = 0$, alors $u(y) \in \text{Ker}(u)$ donc $u(y) \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$ donc $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) \neq \{0\}$.
- Supposons que $u^2(y) \neq 0$. Comme $u^2(y) \in \text{Im}(u^2) = \text{Vect}(x)$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $u^2(y) = tx$. Or $x = u^2(x)$ donc $u^2(y) = tu^2(x)$ et donc $u^2(y - tx) = 0$. Ainsi $u(y - tx) \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$. Il ne reste plus qu'à montrer que $u(y - tx) \neq 0$: si c'était le cas on aurait $y - tx \in \text{Ker}(u)$ donc $y = tx + f$ avec $f \in \text{Ker}(u)$. Or $y \notin E_0 \oplus E_\lambda$, contradiction.

On a donc bien $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) \neq \{0\}$.

- Soit $e_1 \in \text{Ker}(u)$ un vecteur non nul, e_2 un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1, et e_3 un antécédent d'un vecteur non nul de $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$ (c'est à dire un vecteur tel que $u(e_3) \neq 0$ et $u^2(e_3) = 0$, existe d'après la question précédente). Alors $u(e_1) = 0$ par définition, $u(e_2) = e_2$ par définition, et $u(e_3) \in \text{Ker}(u)$. Comme $\text{Ker}(u)$ est une droite vectorielle il existe t tel que $u(e_3) = te_1$. Posons $e'_3 = \frac{1}{t}e_3$ de sorte que $u(e'_3) = e_1$.

Montrons que (e_1, e_2, e'_3) est bien une base de \mathbb{R}^3 , pour cela il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e'_3 = 0$$

Alors en composant par u^2 on obtient

$$\lambda_2 e_2 = 0$$

donc $\lambda_2 = 0$. L'égalité de départ devient donc

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e'_3 = 0$$

et en appliquant cette fois u on obtient

$$\lambda_3 e_1 = 0$$

d'où $\lambda_3 = 0$. Il ne reste que $\lambda_1 e_1 = 0$ d'où il vient immédiatement que $\lambda_1 = 0$. La famille (e_1, e_2, e'_3) est libre, c'est donc bien une base car $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et dans cette base la matrice représentative de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$